LOGIQUE. ENSEMBLES

A la fin du XIX^{ème} siècle, les différentes parties des mathématiques ont acquis un langage commun : celui de la théorie des ensembles.
La formalisation des définitions, des théorèmes et des démonstrations permet d'éviter toute ambiguïté, et d'atteindre un haut niveau de rigueur. Cependant, son usage excessif rend les énoncés mathématiques très difficiles à déchiffrer. Nous utiliserons donc ce langage avec modération, chaque fois qu'il permet de préciser et de clarifier une notion, de trancher des cas litigieux, ou de valider une démonstration, mais sans jamais perdre de vue le sens des propositions manipulées.

I.— Notions de logique.

1.1 Assertions.

DÉFINITION 1. —

Une **assertion** ou une **proposition** mathématique est un énoncé qui peut être déclaré vrai (V) ou faux (F) sans ambiguité, dans le cadre d'une théorie donnée (c'est-à-dire en référence à un ensemble d'axiomes acceptés au départ).

EXEMPLE 1.— "$\sqrt{2} > 3$" est une assertion fausse ; "$\sqrt{2} \leq 3$" est une assertion vraie.
"Je suis grand." n'est pas une assertion ("grand" par rapport à qui ?).
Par contre, "Je suis le plus grand de toute la classe." est une assertion (*vraie pour le plus grand de la classe, non nécessairement unique, et fausse pour les autres).*
Mais attention, "Je suis le plus beau de toute la classe." n'est pas une assertion car le critère de la beauté est très subjectif.
" Maintenant tombe la neige." est une assertion vraie ou fausse selon la date et le lieu.

1.2 Opérations sur les assertions.

On peut, à partir d'assertions données A et B, en créer de nouvelles :

- **Négation**

  L'assertion notée non A ou non (A) ou encore $\neg A$ est appelée la **négation** de A, où :

  $$(\text{non}A \text{ est vraie}) \text{ signifie } (A \text{ est fausse}).$$

EXEMPLE 2.— La négation de (6 est un entier impair) s'écrit (6 est un entier pair).

- **Conjonction**

L'assertion notée (A et B), ou $A \wedge B$, est appelée **conjonction** de A et de B, où :

((A et B) est vraie) signifie que les deux assertions A et B sont vraies.

EXEMPLE 3.— (6 est un entier pair et 6 est multiple de 3) est une assertion vraie, tandis que (6 est un entier pair et 6 est multiple de 5) est une assertion fausse.

- **Disjonction**

L'assertion notée (A ou B), ou $A \vee B$, est appelée **disjonction** de A et de B, où :

((A ou B) est vraie) signifie que l'une au moins des assertions A ou B est vraie.

EXEMPLE 4.— (6 est un entier pair ou 6 est multiple de 5) est une assertion vraie, tandis que (6 est un entier impair ou 6 est multiple de 5) est une assertion fausse.

- **Implication**

L'assertion ((non A) ou B), notée ($A \Rightarrow B$), est appelée l'**implication** de B par A. Elle se lit "A implique B".

En particulier ($A \Rightarrow A$) est vraie quelle que soit l'assertion A.

REMARQUE 1.— La notation ($A \Rightarrow B$) est le plus souvent utilisée dans le sens de : " si A *(sous-entendu, est vraie)*, alors B *(sous-entendu, est vraie)* ". En effet, par définition, **si** A **et** ($A \Rightarrow B$) **sont vraies, alors** B **est vraie**[1]. C'est ce que l'on appelle le **syllogisme.**

¡ L'assertion (3 est pair $\Rightarrow$ 3 est multiple de 2) est vraie et pourtant, l'assertion (3 est pair) est fausse, tout comme l'assertion (3 est multiple de 2). !

- **Equivalence**

L'assertion (($A \Rightarrow B$) et ($B \Rightarrow A$)) est notée ($A \Leftrightarrow B$) et s'appelle **équivalence (logique)** de A et de B.

Les assertions ($A \Rightarrow B$) et ($B \Rightarrow A$) sont appelées **implications réciproques.**

Ainsi, dire que l'assertion ($A \Leftrightarrow B$) est vraie, c'est dire que les assertions ($A \Rightarrow B$) et ($B \Rightarrow A$) sont toutes les deux vraies.

[1] en effet, on suppose que A et ((non A) ou B) sont vraies. Ainsi, ((non A) ou B) est vraie et non A est fausse, ce qui assure que B est vraie.

En résumé, les tableaux ci-dessous, appelé **tables de vérité,** donnent les valeurs logiques des assertions précédentes suivant celles de A et de B :

A	non$A$
V	F
F	F

A	B	A et B	A ou B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Définition 2.

Les symboles non$\,(.)$, et, ou, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sont appelés **connecteurs logiques** de **négation,** de **conjonction**, de **disjonction**, d'**implication**, d'**équivalence logique.**

Exercice 1.— A partir des définitions de l'implication et de l'équivalence, retrouver les valeurs logiques de $(A \Rightarrow B)$ et $(A \Leftrightarrow B)$.

1.3 Propriétés des connecteurs logiques.

Propriété 1.

Soient A, B et C trois assertions quelconques. On montre que les assertions suivantes sont toutes vraies *(quelque soit la valeur logique de A, B, C. On parle de **tautologies**.*

$$\begin{array}{rcllr}
(A \Rightarrow B) & \Leftrightarrow & (\text{non}B \Rightarrow \text{non}A) & \textit{(}\textbf{\textit{Contraposition}}\textit{)} & (1)\\
[(A \Rightarrow B)\ \text{ et }\ (B \Rightarrow C)] & \Rightarrow & (A \Rightarrow C) & \textit{(}\textbf{\textit{Transitivité}}\text{ de l'implication}\textit{)} & (2)\\
A & \Leftrightarrow & \text{non}\,(\text{non}A) & \textit{(}\textbf{Règles} & (3)\\
\text{non}(A \text{ et } B) & \Leftrightarrow & [(\text{non}A)\ \text{ ou }\ (\text{non}B)] & \textit{de} & (4)\\
\text{non}(A \text{ ou } B) & \Leftrightarrow & [(\text{non}A)\ \text{ et }\ (\text{non}B)] & \textbf{Morgan}\textit{)} & (5)\\
[(A \text{ ou } B) \text{ ou } C] & \Leftrightarrow & [A \text{ ou } (B \text{ ou } C)] & \textit{(}\textbf{\textit{Associativité}}\textit{ de} & (6)\\
[(A \text{ et } B) \text{ et } C] & \Leftrightarrow & [A \text{ et } (B \text{ et } C)] & \text{“ ou ” }\textit{et de “ et ”)} & (7)\\
[(A \text{ ou } B) \text{ et } C] & \Leftrightarrow & [(A \text{ et } C) \text{ ou } (B \text{ et } C)] & & (8)\\
[(A \text{ et } B)\ \text{ ou }\ C] & \Leftrightarrow & [(A \text{ ou } C)\ \text{ et }\ (B \text{ ou } C)] & & (9)\\
((A \Rightarrow C)\ \text{ et }\ (B \Rightarrow C)) & \Rightarrow & ((A \text{ ou } B) \Rightarrow C) & & (10)
\end{array}$$

Exercice 2.— Démontrer les propriétés (1), (4) et (10) ci-dessus.

Remarque 2.— Dans un raisonnement mathématique, lorsque $(A \Leftrightarrow B)$ est vraie quelles que soient les assertions A et B, on pourra remplacer partout A par B.

REMARQUE 3.— D'après les équivalences (6) et (7), on pourrait se passer du parenthésage. Ce dernier est cependant essentiel lorsque l'on trouve dans une même assertion au moins deux connecteurs différents *(cf équivalences* $(4),(5),(8),(9)$ *et* (10)*).*
Cependant, l'écriture $\text{non}\, A$ se passe de parenthèses. Ainsi, lorsque l'on écrira, par exemple $\text{non}\, A \text{ et } B$ sans parenthèses, cela signifiera $(\text{non}\, A) \text{ et } B$ et pas $\text{non}\,(A \text{ et } B)$ ...

REMARQUE 4.— Puisque l'implication (et par suite l'équivalence) est transitive, on autorisera les écritures du type $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ ou $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$, etc... .

REMARQUE 5.— Etant donnée une assertion A, on peut considérer que l'énoncé "A est vraie" est une nouvelle assertion *(de même que* "(A est vraie) est vraie"), ce que l'on ne fera pas en réalité.
Dans la pratique, on adoptera même la convention :

Celui qui formule une assertion affirme qu'elle est vraie (sauf mention du contraire).

On se contentera donc d'écrire "on a A", ou tout simplement "A", pour signifier que l'on considère que l'assertion A est une assertion vraie.
Dorénavant, on écrira $(A \Rightarrow B)$ pour signifier que $(A \Rightarrow B)$ est une assertion qui a la valeur logique V ; de même pour $(A \Leftrightarrow B)$.

EXERCICE 3.— Quelle est la négation de $A \Rightarrow B$? de $A \Leftrightarrow B$?

1.4 Quantificateurs.

Une expression portant une lettre représentant une variable telle que "x est multiple de 3" n'est pas une proposition. Ici, elle n'a de sens que si x est astreinte à appartenir à l'ensemble $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$). Si on donne à x la valeur 5 on obtient la proposition, fausse : "5 est multiple de 3" ; par contre, si l'on donne à x la valeur 18 on obtient la proposition, vraie "18 est multiple de 3".

DÉFINITION 3.

Etant donné un ensemble E, appelé **référentiel**, on appelle **forme propositionnelle** à une variable, définie sur E, toute expression contenant une variable x et qui devient une proposition pour toute valeur donnée à x dans E. Pour une forme propositionnelle $p(x)$, p représente une **propriété** ou **prédicat** defini sur E.

Au prédicat A à une variable, on peut associer deux nouvelles assertions :

- La première, qui s'écrit :
$$\forall x,\ A(x)$$
s'énonce : " L'assertion $A(a)$ est vraie **pour tout objet** a du référentiel ".

- La seconde, qui s'écrit :
$$\exists x,\ A(x)$$
s'énonce : " **Il existe au moins un objet** a du référentiel tel que l'assertion $A(a)$ soit vraie ".

DÉFINITION 4.

Les symboles $\forall$ et $\exists$ sont respectivement appelés **quantificateur universel** et **quantificateur existentiel.**

REMARQUE 6.— En pratique, on prendra toujours pour référentiel un ensemble donné E et on écrira :

$$\begin{array}{l} \forall x \in E,\ A(x) \\ \exists x \in E,\ A(x) \quad \text{(ou parfois, } \exists x \in E \ / \ A(x)\text{).} \end{array}$$

Les expressions ci-dessus peuvent être écrites avec d'autres lettres que x pour une signification équivalente. On dit alors que x joue le rôle d'une **variable muette**.

REMARQUE 7.— On utilise aussi l'assertion

$$\exists! x,\ A(x)$$

qui se lit : " **il existe un et un seul objet** a du référentiel tel que l'assertion $A(a)$ soit vraie ".

PROPRIÉTÉ 2.

- non($\forall x,\ A(x)$) s'écrit $\exists x,\ \text{non}\, A(x)$.
- non($\exists x,\ A(x)$) s'écrit $\forall x,\ \text{non}\, A(x)$.

EXEMPLE 5.— *La négation de "Tous les hommes sont mortels." est : "Il existe au moins un homme qui est immortel."*

REMARQUE 8.— L'ordre des quantificateurs peut avoir une grande importance.
Par exemple, un nombre rationnel peut être caractérisé par :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad \exists q \in \mathbb{N}^*, \quad qx \in \mathbb{Z}$$

(q est le dénominateur d'une fraction représentant x). Ici, q dépend de x.
Mais l'assertion $\exists q \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{Q}, \quad qx \in \mathbb{Z}$ est absurde, puisqu'elle exprime l'existence d'un dénominateur commun à toute les fractions. Notons, qu'ici q ne dépend plus de x.

Exercice 4.— Une fonction numérique f est dite bornée si :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq m \text{ et } f(x) \leq M$$

Traduire mathématiquement "f n'est pas bornée".

Exercice 5.— Quelle est la négation de :

1. $\forall x,\ (A(x) \Rightarrow B(x))$?
2. $\forall x,\ [A(x) \Rightarrow (\exists y,\ \text{non}\, B(x,y))]$?

1.5 Quelques modes de raisonnements mathématiques.

Réaliser une démonstration mathématique dans le cadre d'une théorie mathématique, c'est déduire des assertions vraies (*théorèmes)* à partir d'axiomes *(assertions admises comme étant vraies)* ou d'autres assertions vraies *(on raisonne par implications).* On utilise les connecteurs logiques, des lettres, des signes spécifiques dont l'usage est régi par des règles données dans la théorie (comme $=$ et $\in$ pour la théorie des ensembles[2]).

1.5.1 Méthode de l'hypothèse auxiliaire.

Dans la pratique, pour démontrer que $A \Rightarrow B$, on suppose A (*c'est-à-dire, avec la convention, que l'assertion A est vraie ; c'est l'hypothèse auxiliaire*) et on montre alors B en utilisant l'hypothèse[3].

Remarque 9.— Si A est une assertion fausse, on doit pouvoir démontrer que $(A \Rightarrow B)$ est vraie. Il ne faudrait pas alors conclure que B est vraie. En fait, dans ce cas, on ne sait rien sur la valeur logique de B.
Finalement, montrer que $A \Rightarrow B$ si on ne sait pas que A est effectivement vraie ne sert à rien, puisque la conclusion B ne peut pas être exploitée...

1.5.2 Le raisonnement par l'absurde.

Il est fondé sur la **contraposition** :

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non}B \Rightarrow \text{non}A)$$

On veut démontrer $A \Rightarrow B$. On suppose A *(donc* non A fausse). Il faut donc montrer que B est vraie
On raisonne par l'absurde, en faisant l'hypothèse : non B est vraie. Si on peut démontrer que non A est vraie, on aboutit à une contradiction et on conclut que B est vraie, donc que $A \Rightarrow B$[4].

---

[2]Les notions d'appartenance et d'égalité sont des **notions premières**, encore appelées **termes primitifs**. Elles ne sauraient être rattachées à aucune notion antérieure.

[3]En effet, " vrai $\Rightarrow$ vrai " est vraie et " faux $\Rightarrow B$ " est vraie quelque soit la valeur logique de B. Il n'est donc pas utile de supposer A fausse et d'ailleurs, le seul cas intéressant pour développer une théorie est le cas où A est vraie.

[4]En fait, lorsque l'on a démontré que non A est vraie, on a démontré non $B \Rightarrow$ non A *(d'après le paragraphe précédent)* donc que $(A \Rightarrow B)$ est vraie par contraposition. Puisque l'on a supposé que A est vraie, on conclut en pratique que B est vraie (c'est le syllogisme).

Exemple 6.— Soit à démontrer le résultat : “ Si p est un entier premier, alors $\sqrt{p}$ est un nombre irrationnel ”.

□ Soit p un nombre premier. Montrons par l'absurde que $\sqrt{p}$ est un nombre irrationnel.
Supposons que $\sqrt{p}$ soit un rationnel. Il existe alors deux entiers naturels non nuls[5] a et b premiers entre eux tels que :

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}.$$

On obtient alors l'égalité : $b^2p = a^2$ (E).
Or, tout entier admet une décomposition **unique** en produit de facteurs premiers. Ecrivons celles de a et de b :

$$a = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n} \quad \text{et} \quad b = q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}...q_m^{\beta_m},$$

où les entiers p_i sont premiers deux à deux distincts et les α_i sont des entiers naturels non nuls (idem pour les q_j et les β_j).
L'égalité (E) donne alors : $q_1^{2\beta_1}q_2^{2\beta_2}...q_m^{2\beta_m}p = p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}...p_n^{2\alpha_n}$.
Par unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers, p est l'un des entiers premiers p_i, soit p_{i_0}.
Dans le membre de gauche, le nombre premier $p = p_{i_0}$ appaît nécessairement à une puissance **impaire** alors que dans le membre de droite, il apparaît à une puissance paire. Ceci contredit l'unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers ; d'où une absurdité.
Conclusion : L'hypothèse “ $\sqrt{p}$ est rationnel ” est fausse. Autrement dit, $\sqrt{p}$ est un nombre irrationnel. ■

1.5.3 Méthode de disjonction des cas.

Elle utilise l'implication

$$((A \Rightarrow C)\,\text{et}\,(B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A\,\text{ou}\,B) \Rightarrow C) \tag{10}$$

vraie quelque soit la valeur logique des assertions A, B, C.
Ainsi, pour démontrer $(A\,\text{ou}\,B) \Rightarrow C$, il suffit de démontrer séparément les deux implications $(A \Rightarrow C)$ et $(B \Rightarrow C)$ *(on utilise encore le syllogisme).*

II.— Ensembles.

2.1 Ensembles et éléments.

La notion d'ensemble est une **notion première** que l'on ne cherchera donc pas à définir. Disons seulement qu'un ensemble est un objet E auquel peut **appartenir** ou **ne pas appartenir** un autre objet.
On note “ $x \in E$ ” l'assertion “ x appartient à E ” et “ $x \notin E$ ” sa négation, i.e. l'assertion “ x n'appartient pas à E ”.

[5] $\sqrt{p}$ est positif et non nul.

Un objet qui appartient à E s'appelle **élément** de E.
Si a et b sont deux éléments de E, on écrira $a = b$ pour exprimer que a et b sont le même objet.

EXEMPLE 1.— Ensembles de nombres

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels (défini de façon axiomatique[1]).
- A partir de $\mathbb{N}$, on peut construire à l'aide d'opérations convenables d'autres ensembles comme $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

EXEMPLE 2.— L'ensemble des solutions d'une équation dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.2 Sous-ensembles.

DÉFINITION 1.

Soient E et F deux ensembles.

1. On dit que F est inclus dans E et on écrit $F \subset E$ si, et seulement si, tout élément de F est élément de E. Autrement dit, on a :

$$(F \subset E) \Leftrightarrow [\forall x,\ (x \in E \Rightarrow x \in F)]$$

   On dit aussi que F est un **sous-ensemble** ou une **partie** de E. $\subset$ est le symbole d'inclusion.

2. On dit que E est égal à F si et seulement si E et F ont exactement les mêmes éléments.
   Autrement dit, on a :

$$\begin{aligned}(E = F) \quad &\Leftrightarrow \quad [\forall x,\ (x \in E \Leftrightarrow x \in F)] \\ &\Leftrightarrow \quad (E \subset F \text{ et } F \subset E)\end{aligned}$$

REMARQUE 1.— Pour trois ensembles E, F et G, on a toujours :

- $E \subset E$. *On dit que l'inclusion est* ***réflexive****.*
- $(F \subset E$ et $E \subset F) \Rightarrow (E = F)$. *On dit que l'inclusion est* ***symétrique****.*
- $(G \subset F$ et $F \subset E) \Rightarrow (G \subset E)$. *On dit que l'inclusion est* ***transitive****.*

[1] à l'aide des axiomes de Peano dont fait partie l'**axiome de récurrence** :
Si A est une partie de $\mathbb{N}$ ayant pour éléments : d'une part 0 et d'autre part le suivant de tout entier naturel lui appartenant, alors $A = \mathbb{N}$.

REMARQUE 2.— Il existe des ensembles possèdant un **unique** élément. C'est le cas, par exemple du sous-ensemble $\{3\}$ de $\mathbb{N}$. Ces ensembles sont appelés des **singletons.**

¡ Il ne faut pas confondre le singleton $\{3\}$ et l'élément 3 de $\mathbb{N}$.
On peut écrire "$3 \in \mathbb{N}$" ou "$\{3\} \subset \mathbb{N}$", mais pas "$\{3\} \in \mathbb{N}$"... !

Soit un prédicat p défini sur l'ensemble E.
Un sous-ensemble A de E peut être défini comme l'ensemble des éléments x de E pour lesquels la proposition $p(x)$ est vraie. Ce nouvel ensemble se note :

$$\{x \in E,\ p(x)\}.$$

On dit qu'il est défini en **compréhension** ; on dit aussi que $p(x)$ caractérise l'ensemble A.
L'ensemble A est dit **extension** du prédicat.

EXEMPLE 3.— $\{z \in \mathbb{C},\ z^7 = 1\}$ est une partie de $\mathbb{C}$ définie en compréhension. C'est l'ensemble $\mathbb{U}_7$ des racines septièmes de l'unité[2].

REMARQUE 3.— Si pour tout élément x de E, l'assertion $A(x)$ est fausse, on obtient l'ensemble vide qui doit donc être considéré comme un sous-ensemble de n'importe quel ensemble. On le note : $\emptyset$.

EXEMPLE 4.— $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) < -1 \text{ et } \mathrm{Re}(z) \geq \pi\} = \emptyset \subset \mathbb{C}$.

2.3 Ensemble des parties d'un ensemble.

Dans la suite, E désigne un ensemble fixé.

2.3.1 L'ensemble $\mathcal{P}(E)$.

DÉFINITION 2.

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de E. Ainsi :

$$(A \in \mathcal{P}(E)) \Leftrightarrow (A \subset E)$$

En particulier : $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.

EXEMPLE 5.— $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

EXEMPLE 6.— $\mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

[2] $\mathbb{U}_7 = \{1, a, ..., a^6\}$ où $a = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On dit que $\{1, a, ..., a^6\}$ est la définition en **extension** de l'ensemble des racines 7-ièmes de l'unité.

2.3.2 Opérations dans $\mathcal{P}(E)$.

Soient A et B deux parties de E. On définit à partir de A et de B des nouvelles parties de E.

DÉFINITION 3.

L'ensemble

$$\{x \in E,\ x \notin A\}$$

s'appelle le **complémentaire** de A dans E ; il est noté $C_E A$ ou $E \setminus A$. Par définition :

$$\forall x \in E,\ (x \in E \setminus A) \Leftrightarrow (x \notin A).$$

REMARQUE 4.— $E \setminus (E \setminus A) = A$; $E \setminus E = \emptyset$; $E \setminus \emptyset = E$.

EXEMPLE 7.— $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R},\ x < 0\} = \mathbb{R}_+$; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des irrationnels.

DÉFINITION 4.

L'ensemble

$$\{x \in E,\ (x \in A \text{ et } x \in B)\}$$

s'appelle l'**intersection** de A et B ; il est noté $A \cap B$. Par définition :

$$\forall x \in E,\ (x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$$

En particulier : $A \cap \emptyset = \emptyset$; $(E \setminus A) \cap A = \emptyset$.
Lorsque l'intersection de A et B est vide ($A \cap B = \emptyset$), on dit que A et B sont **disjoints.**

EXEMPLE 8.— $\left\{z \in \mathbb{C},\ \left|z - \frac{1}{2}\right| = 1\right\} \cap \left\{z \in \mathbb{C},\ \left|z + \frac{1}{2}\right| = 1\right\} = \left\{-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

DÉFINITION 5.

L'ensemble

$$\{x \in E,\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

s'appelle la **réunion** de A et B ; il est noté $A \cup B$. Par définition :

$$\forall x \in E, \quad (x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

En particulier : $A \cup \emptyset = \emptyset$; $(E \setminus A) \cup A = E$.

EXEMPLE 9.— $\mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3 = \{-1, 1, j, j^2\}$ où $\mathbb{U}_n$ désigne l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Exercice 1.— Pour quelles parties A et B peut-on avoir $A \cup B = \emptyset$?

Définition 6.

L'ensemble

$$A \cap (E \setminus B) = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

est noté $A \setminus B$ et est appelé la **différence** de A par B.

Remarque 5.— On a toujours : $A \setminus A = \emptyset$; $A \setminus \emptyset = A$.

Exemple 10.— $\mathbb{U}_3 \setminus \mathbb{U}_2 = \{j, j^2\}$.

2.3.3 Propriétés.

Des propriétés des règles de logique, on déduit sans difficulté les propriétés suivantes.

Propriété 1.

Soient A, B et C trois sous-ensembles de E. Alors :

1. $A \subset B \Leftrightarrow E \setminus B \subset E \setminus A$ *(cf contraposition).*
2. L'intersection $\cap$ et la réunion $\cup$ sont des lois **commutatives** et **associatives** sur $\mathcal{P}(E)$.
3. **Règles de Morgan :** **(i)** $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$
   (ii) $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$.
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$).
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$).

Exercice 2.— Soient A, B, C et D quatre parties de E. Montrer que :

$$(A \subset B \text{ et } C \subset D) \Rightarrow (A \cap C \subset B \cap D) \ ;$$
$$(A \subset B \text{ et } C \subset D) \Rightarrow (A \cup C \subset B \cup D) .$$

2.4 Produit cartésien.

Tout ensemble de deux éléments $\{x, y\}$ est appelé **paire**. La notion de couple en découle ; étant donnés deux éléments x et y, l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ est appelé **couple** x, y, et est noté (x, y).
On définit alors le produit cartésien de deux ensembles comme suit.

DÉFINITION 7.

Soient E et F deux ensembles. On peut construire un nouvel ensemble appelé **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$, de la façon suivante :

$$E \times F = \{(x, y),\ x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Par définition :

$$(x, y) \in E \times F \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y \in F).$$

Si $E = F$, on note $E \times E = E^2$; $E \times E \times E = E^3$, etc....

PROPRIÉTÉ 2.

Dans $E \times F$, on a :

$$\begin{array}{rcl} [(x,y) = (x',y')] & \Leftrightarrow & (x = x' \text{ et } y = y') \\ [(x,y) \neq (x',y')] & \Leftrightarrow & (x \neq x' \text{ ou } y \neq y') \end{array}$$

PROPRIÉTÉ 3.

On déduit de la définition :

$$(E \times F = \emptyset) \Leftrightarrow (E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset)$$

EXERCICE 3.— Soit $(A, A') \in [\mathcal{P}(E)]^2$. Montrer les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \left(A \cup A'\right) \times F & = & (A \times F) \cup \left(A' \times F\right) \ ; \\ \left(A \cap A'\right) \times F & = & (A \times F) \cap \left(A' \times F\right). \end{array}$$

BIBLIOGRAPHIE

[Cond] M. CONDAMINE, Algèbre et géométrie, Classe de Terminale D, Collection P. Visio, Delagrave, 1972

[LelArn] J. LELONG-FERRAND, J.-M. ARNAUDIES, Cours de Mathématiques, t. 1, Algèbre, Dunod Université, 1978

[OudDel] X. OUDOT, M. DELYE-CHEVALIER, Algèbre Géométrie, $1^{ère}$ année, MPSI, Hachette Supérieur, 1998

— — — — — — — — —

Claire MARIE, Patrick CABAU

Préparation Enseignement Supérieur Scientifique, Lycée Pierre Mendès France, Tunis

janvier 2004