Espaces vectoriels

I.— Structure d'espace vectoriel réel

Définition 1.– Soit E un ensemble non vide.

1. Une loi de composition interne dans E est une application de $E \times E$ dans E.
2. Une loi de composition externe sur E est une application de $\mathbb{R} \times E$ dans E.

Exemple 1.– On peut munir $E = \mathbb{R}^2 = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

1. d'une loi de composition interne (l'addition) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \longmapsto & (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{array}$$

2. d'une loi de composition externe (la multiplication externe) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\alpha, (x, y)) & \longmapsto & \alpha.(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \end{array}$$

Définition 2.– Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi de composition interne notée .
On dit que $(E, +, .)$ a une structure d'espace vectoriel réel si les axiomes suivants sont vérifiés :
(EV1) Associativité de $+$: $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3, \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$
(EV2) Existence d'un neutre pour $+$: $\exists \overrightarrow{0} \in E : \forall \overrightarrow{u} \in E, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
(EV3) Existence d'un opposé : $\forall \overrightarrow{u} \in E, \exists \overrightarrow{u'} \in E : \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'} = \overrightarrow{u'} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
(EV4) Commutativité : $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
(EV5) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2, \alpha.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha.\overrightarrow{u} + \alpha.\overrightarrow{v}$
(EV6) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall \overrightarrow{u} \in E, (\alpha + \beta).\overrightarrow{u} = \alpha.\overrightarrow{u} + \beta.\overrightarrow{u}$
(EV7) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall \overrightarrow{u} \in E, \alpha.(\beta.\overrightarrow{u}) = (\alpha\beta).\overrightarrow{u}$
(EV8) $\forall \overrightarrow{u} \in E, 1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$

Exemple 2.– $(\mathbb{R}^2, +, .)$ ensemble des couples de réels muni de l'addition des couples et de la multiplication externe par les réels est un espace vectoriel.

Exemple 3.– $(\mathbb{C}, +, .)$ ensemble des complexes est un espace vectoriel réel.

Exemple 4.– Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n), x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$, ensemble des $n-$uplets de réels, a une structure d'espace vectoriel.

Exemple 5.– Soit $\mathcal{P}$ le plan affine. On considère dans $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ la relation d'équipollence $\sim$ définie par

$$(A, B) \sim (A', B') \text{ si et seulement si les segments } [AB'] \text{ et } [A'B] \text{ ont le même milieu.}$$

Cette relation est une relation d'équivalence, i.e. elle est :

1. réflexive : $\forall (A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}, (A, B) \sim (A, B)$
2. symétrique : si $(A, B) \sim (A', B')$ alors $(A', B') \sim (A, B)$

3. transitive : si $\begin{cases} (A,B) \sim (A',B') \\ \text{et} \\ (A',B') \sim \left(A'',B''\right) \end{cases}$ alors $(A,B) \sim (A'',B'')$.

Un vecteur du plan est alors l'ensemble des bipoints équipollents à un bipoint donné :

$$\overrightarrow{AB} = \{(a,b) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} : (a,b) \sim (A,B)\}.$$

Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est alors l'ensemble des couples de la forme (a,a).
Un vecteur non nul est alors caractérisé par sa direction, son sens et sa norme.
L'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan muni de l'addition vectorielle [1] et de la multiplication par les réels a une structure d'espace vectoriel.

Exemple 6.– Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions affines, i.e. de la forme $\begin{array}{cccc} f_{a,b} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ax+b \end{array}$.
$\mathcal{A}$ muni de l'addition où $f_{a,b} + f_{a',b'} = f_{a+a',b+b'}$ et de la multiplication par les réels où $\alpha . f_{a,b} = f_{\alpha a, \alpha b}$ a une structure d'epace vectoriel.

Exemple 7.– L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 $y' = ay$, i.e. l'ensemble des fonctions de la forme : $x \longmapsto ce^{ax}$, a une structure d'espace vectoriel.

Exemple 8.– L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 $y'' + \omega^2 y = 0$ (où $\omega \neq 0$), i.e. l'ensemble des fonctions de la forme $x \longmapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, a une structure d'espace vectoriel.

Exemple 9.– Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.– Soient a et b deux réels où $b \neq 0$. L'ensemble $S_{a,b}$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a\ u_{n+1} + b\ u_n$$

a une structure d'espace vectoriel.

Exemple 10.– L'ensemble $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ a une structure d'espace vectoriel pour l'addition des fonctions et la multiplication des fonctions par un réel.

II.— Sous-espace vectoriel

Définition 1.– Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel et soit F une partie non vide de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est lui-même un espace vectoriel (pour les lois induites sur F).

Proposition 1.– Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel et soit F une partie non vide de E.
F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si
(SEV1) F est stable pour l'addition vectorielle :

$$\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F^2, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F$$

(SEV2) F est stable pour la multiplication externe :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{u} \in F, \alpha . \overrightarrow{u} \in F$$

Exemple 1.– La partie $F = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{0\}$ de $E = \mathbb{R}^2$ est

[1] Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Soit A un point donné du plan. Il existe un seul point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et un seul point C tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$. La somme $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ est alors le vecteur $\overrightarrow{AC}$. On vérifie que cette définition est indépendante des points A, B et C.

f

– non vide car contenant $(0,0)$
– stable pour l'addition : $(x,0)+(x',0)=(x+x',0)\in F$
– stable pour la multiplication externe : $\alpha.(x,0)=(\alpha x,0)\in F$.
F est donc un sous espace vectoriel de $\left(\mathbb{R}^2,+,.\right)$.

Exemple 2.– La partie $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-2z=0\right\}$ [1] est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3.– L'ensemble des fonctions affines $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $(C(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,.)$ espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

III.— Famille génératice

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel réel.

Définition 1.– On dit qu'une famille finie $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n})$ de vecteurs de E est une famille génératrice de E si tout vecteur de E peut être écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille :

$$\forall\overrightarrow{v}\in E,\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n : \overrightarrow{v}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i.\overrightarrow{u_i}$$

Exemple 1.– $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ où $\overrightarrow{u_1}=(1,0)$ et $\overrightarrow{u_2}=(0,1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ puisque tout élément $\overrightarrow{v}=(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ peut être écrit $\overrightarrow{v}=x.\overrightarrow{u_1}+y.\overrightarrow{u_2}$ (cette écriture est unique).

On peut aussi écrire $\overrightarrow{v}$ comme combinaison linéaire des 3 vecteurs $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}$:

$\overrightarrow{v}=(x-y-2).\overrightarrow{u_1}+(y+1).(\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2})+1.(\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2})$ (cette écriture n'est pas unique).

Proposition 1.– Soit $(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_p})$ une famille finie de vecteurs de E. L'ensemble $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_p})$ des combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_p}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs $\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_p}$.

IV.— Famille libre. Famille liée.

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel réel.

Définition 1.– On dit qu'une famille finie $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n})$ de vecteurs de E est une famille libre si la seule combinaison linéaire de ces vecteurs qui est nulle est celle dont tous les coefficients son nuls :

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n,\quad \lambda_1.\overrightarrow{u_1}+\dots+\lambda_n.\overrightarrow{u_n}=\overrightarrow{0}\quad\Longrightarrow\quad(\lambda_1=\dots=\lambda_n=0)$$

On dit alors que les vecteurs sont indépendants.

Exemple 1.– $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ où $\overrightarrow{u_1}=(1,0)$ et $\overrightarrow{u_2}=(0,1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.

Définition 2.– Une famille est dite liée si elle n'est pas libre :

$$\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{(0,\dots,0)\} : \lambda_1.\overrightarrow{u_1}+\dots+\lambda_n.\overrightarrow{u_n}=\overrightarrow{0}$$

Exemple 2.– La famille $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ n'est pas libre puisqu'il existe une combinaison linéaire nulle de ces 3 vecteurs à coefficients non tous nuls : $2.\overrightarrow{u_1}+(-1).(\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2})+(-1).(\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2})=\overrightarrow{0}$.

[1] Par contre la partie $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-2z+1=0\right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car elle n'est pas stable par addition.

V.— Base

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel réel.

Définition 1.– On dit qu'une famille finie $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Exemple 1.– Soient $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0)$ et $\overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1)$. La famille finie $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ appelée base canonique.

Proposition 1.– La famille finie $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de ces vecteurs.

Démonstration. – Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur quelconque de E. Puisque $\mathcal{B}$ engendre E, $\overrightarrow{v}$ peut s'ecrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$\overrightarrow{v} = \alpha_1.\overrightarrow{e_1} + \cdots + \alpha_n.\overrightarrow{e_n}$$

Soient $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des réels tels que :

$$\overrightarrow{v} = \beta_1.\overrightarrow{e_1} + \cdots + \beta_n.\overrightarrow{e_n}$$

On a alors $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v} = (\alpha_1 - \beta_1).\overrightarrow{e_1} + \cdots + (\alpha_n - \beta_n).\overrightarrow{e_n}$.
Or $\mathcal{B}$ est un système libre ; par conséquent : $\alpha_1 - \beta_1 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0$ et ainsi $\beta_1 = \alpha_1, \ldots, \beta_n = \alpha_n$. On en déduit que $\overrightarrow{v}$ ne peut être écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$ que d'une manière unique.
– Réciproquement, supposons que tout vecteur de E s'écrive de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$. Il est alors évident que ce système de vecteurs est générateur de E. En particulier, le vecteur nul peut alors être écrit comme combinaison linéaire de ces vecteurs : $\overrightarrow{0} = \alpha_1.\overrightarrow{e_1} + \cdots + \alpha_n.\overrightarrow{e_n}$. Mais on a de manière évidente $\overrightarrow{0} = 0.\overrightarrow{e_1} + \cdots + 0.\overrightarrow{e_n}$. L'unicité de l'écriture vectorielle conduit à $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ et le système $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est alors libre.
Le système $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ étant à la fois générateur de E et libre, c'est une base de E.

Théorème 1.– Si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est une base de E, toute autre base de E contient n vecteurs. L'entier naturel n est appelé dimension de l'espace vectoriel E et est noté $\dim E$.

Exemple 2.– $\dim \mathbb{R}^n = n$

Théorème 2.– de la base incomplète.– Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{L} = \left(\overrightarrow{l_1}, \ldots, \overrightarrow{l_p}\right)$ un système libre de p vecteurs de E.
Il existe alors une base $\mathcal{B}$ de E qui contient $\mathcal{L}$, i.e. $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{l_1}, \ldots, \overrightarrow{l_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\right)$.

Exemple 3.– $\mathcal{L} = \left(\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}\right)$ où $\overrightarrow{l_1} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{l_2} = (1, -1, 0)$ est un système libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Ce système peut être complété par $\overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1)$ afin de constituer la base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.– On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

1. Montrer que $A = \left\{\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E dont une base est $\mathcal{L} = \left(\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}\right)$ où $\overrightarrow{l_1} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_3}$ et $\overrightarrow{l_2} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.
2. Soit m un paramètre réel et soit le vecteur $\overrightarrow{v_m} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + m.\overrightarrow{e_3}$.
   Déterminer les valeurs du paramètre m pour lequelles le système $\left(\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{v_m}\right)$ est une base de E.

f

VI.— Applications linéaires

$(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ sont deux espaces vectoriels réels.

Définition 1.– Une application f de E dans F est dite linéaire si, et seulement si, elle vérifie :

$$\begin{cases} \forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2, \quad f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \\ \forall(\alpha,\vec{u}) \in \mathbb{R}\times E, \quad f(\alpha.\vec{u}) = \alpha.f(\vec{u}) \end{cases}$$

ce qui équivaut à l'unique assertion :

$$\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2, \quad \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad f(\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{v}) = \alpha.f(\vec{u}) + \beta.f(\vec{v})$$

On note $L(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemple 1.– Projections vectorielles.– Soit E un espace vectoriel et soient deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 supplémentaires [1] , i.e. tels que $\begin{cases} E = E_1 + E_2 \\ E_1 \cap E_2 = \left\{\vec{0}_E\right\} \end{cases}$. Tout vecteur $\vec{u}$ de E s'écrit alors, de manière unique, comme somme d'un vecteur $\vec{u_1}$ de E_1et d'un vecteur $\vec{u_2}$ de E_2.

La projection (vectorielle) sur E_1 parallèlement à E_2, application p_1 de E dans E qui à $\vec{u}$ associe $\vec{u_1}$

$$p_1 : \begin{array}{rcl} E = E_1 \oplus E_2 & \to & E \\ \vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2} & \mapsto & \vec{u_1} \end{array}$$

est une application linéaire.

Définition 2.– Une application linéaire de E dans E est appelée endomorphisme de E.

Définition 3.– Une application linéaire bijective de E sur F est appelée isomorphisme.

Exemple 2.– On se replace dans le cadre de l'exemple 9.

L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & S_{a,b} \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$ où $\begin{cases} u_0 = \alpha, \ u_1 = \beta \\ u_{n+2} = a\ u_{n+1} + b\ u_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels[2].

Définition 4.– Une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ est appelée forme linéaire de E.
L'ensemble des formes linéaires de E est appelé dual (algébrique) de E et est noté E^*.

Proposition 1.– Soit $f \in L(E,F)$. Soit E' un sous-espace de E et F' un sous-espace de F.
On a alors :

1. $f^{-1}(F')$ est un sous-espace de E.
2. $f(E')$ est un sous-espace de F.

6.1 Noyau et image d'une application linéaire.

Définition 5.– Soit $f \in L(E,F)$. On appelle noyau de f, et on note $\ker f$, l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E dont l'image par l'application linéaire f est nulle.

$$\ker f = \left\{\vec{u} \in E \ / \ f(\vec{u}) = \vec{0}_F\right\} = f^{-1}\left(\left\{\vec{0}_F\right\}\right)$$

---

[1] On écrit alors : $E = E_1 \oplus E_2$

[2] En considérant l'*équation caractéristique* associée : $x^2 - ax - b = 0$, on obtient en fonction du signe de son discriminant Δ des couples de vecteurs $(\vec{e_1},\vec{e_2})$ constituant une base de $S_{a,b}$.
1. $\Delta > 0$: $\vec{e_1} = (\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\vec{e_2} = (\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où α et β sont les racines réelles de l'équation
2. $\Delta = 0$: $\vec{e_1} = (\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\vec{e_2} = (n\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où α est la racine double de l'équation
3. $\Delta < 0$: $\vec{e_1} = (r^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $\vec{e_2} = (r^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ où $re^{i\theta}$ est une racine complexe de l'équation

Définition 6.– Soit $f \in L(E, F)$. On appelle image de f le sous-ensemble $f(E)$ de F. On le note $\mathrm{Im} f$:

$$\mathrm{Im} f = \{\overrightarrow{v} \in F \ : \ \exists \overrightarrow{u} \in E, \ \overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u})\} = \{f(\overrightarrow{u}) \ : \ \overrightarrow{u} \in E\}.$$

Exemple 3.– Dans le cadre du projecteur p_1 de l'exemple 1, on a $\ker p_1 = E_2$ et $\mathrm{Im} p_1 = E_1$.

Théorème 1.– Soit $f \in L(E, F)$. f vérifie les propriétés suivantes.

1. $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.
3. f est injective si, et seulement si, $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$.
4. f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im} f = F$.

6.2 Théorème du rang

Théorème 2.– Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions finies. On a alors, pour toute application linéaire de E dans F :

$$\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$$