ESPACES AFFINES

$\mathcal{P}$ plan = ensemble de points
[défini à l'aide d'axiomes de la géométrie plane]

$\mathcal{X}$: ensemble de solutions de l'équa.diff.
$$y' + y = x + 1.$$
$\mathcal{X} = \{A_a : x \mapsto ae^{-x} + x,\ a \in \mathbb{R}\}$

P : ensemble des vecteurs du plan.
$\overrightarrow{u} \in P$ = classe d'équivalence dans $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$
$\widetilde{(A,B)} = \{(a,b) : [Ab]$ et $[Ba]$ même milieu$\}$
$(P, +, .)$ espace vectoriel ($\dim P = 2$)

X : ensemble de solutions de l'équa.diff.
$$y' + y = 0.$$
$X = \{v_\alpha : x \mapsto \alpha e^{-x},\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

$(X, +, .)$ espace vectoriel ($\dim X = 1$)
$\mathcal{X}$ n'est pas un espace vectoriel
$(A_a + A_b \notin \mathcal{X})$
mais $A_b - A_a = v_{b-a}$

Propriétés :

1) $A \in \mathcal{P}, \overrightarrow{u} \in P,\ \exists! M \in P : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$ — $A_a \in \mathcal{X}, v_\alpha \in X,\ \exists! A_x \in \mathcal{X} : A_x - A_a = v_\alpha$
2) $(A,B,C) \in \mathcal{P}^3,\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ — $(A_a, A_b, A_c) \in \mathcal{X}^3,\ (A_b - A_a) + (A_c - A_b) = A_c - A_a$

Figure de base : le parallélogramme

(A,B,C,D) est un parallélogramme
$$\Leftrightarrow$$
$$\widetilde{(A,B)} = \widetilde{(D,C)}$$

(A_a, A_b, A_c, A_d) est un "parallélogramme"
$$\Leftrightarrow$$
$$A_b - A_a = A_c - A_d$$

I.— Espace affine associé à un espace vectoriel

1.1 Définition. Exemples.

Définition 1.

Soient $\mathcal{E}$ un ensemble non vide[1] et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
$\mathcal{E}$ est un **espace affine** associé à l'espace vectoriel E s'il existe une application
$\varphi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to E$
qui possède les propriétés suivantes :

(EA1) $\forall A \in \mathcal{E}, \forall \overrightarrow{v} \in E, \exists! B \in \mathcal{E} : \varphi(A,B) = \overrightarrow{v}$

(EA2) $\forall (A,B,C) \in \mathcal{E}^3, \varphi(A,B) + \varphi(B,C) = \varphi(A,C)$ (relation de Chasles)

On dit que φ munit $\mathcal{E}$ d'une structure d'espace affine associé à E.
Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés **points** et les éléments de $\mathcal{E}^2$ sont nommés bipoints.

Soit $\mathcal{E}$ un **espace affine** associé à un espace vectoriel E. Si l'espace vectoriel E est de dimension n, on dit que l'espace affine est de dimension n. Pour $n = 1$ (resp. $n = 2$) on parle de **droite affine** (resp.**plan affine**).

[1]On peut trouver une définition d'un espace affine dans [2] utilisant l'action du groupe additif de E sur $\mathcal{E}$.

Deux bipoints qui ont la même image par φ sont appelés **bipoints équipollents**.

Soit v un vecteur de E ; l'application : $\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \to & \mathcal{E} \\ M & \mapsto & M' \end{array}$ où $\varphi(M, M') = \overrightarrow{v}$ est appelée **translation** de vecteur v.

Notation : $\varphi(M, M') = \overrightarrow{MM'}$

Exemple 1.— Plan affine usuel

L'ensemble des points du plan usuel a une structure d'espace affine dont l'espace vectoriel associé est constitué des vecteurs du plan.

Exemple 2.— Ensemble des solutions d'une équation différentielle du premier ordre.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y' + y = x + 1$$

et par E l'espace vectoriel (de dimension 1) des solutions de l'équation

$$y' + y = 0.$$

On a alors :

$$\mathcal{E} = \{A_a : x \mapsto a.e^{-x} + x\} \text{ et } E = \{v_\alpha : x \mapsto \alpha.e^{-x}\}.$$

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \to & E \\ (A_a, A_b) & \mapsto & v_{b-a} \end{array}$ vérifie les propriétés (EA1) et (EA2).

φ munit $\mathcal{E}$ d'une structure d'espace affine (de dimension 1).associé à la droite vectorielle E.

1.2 Propriétés

1)$\varphi(M, M) = \overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{0}$
2)$\varphi(M, N) = -\varphi(N, M)$	$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$
3) $\left(\varphi(M, N) = \overrightarrow{0}\right) \Leftrightarrow (M = N)$	$\left(\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}\right) \Leftrightarrow (M = N)$
4)$\forall M_0 \in \mathcal{E}$, $\varphi_{M_0} : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \to & E \\ M & \mapsto & \varphi(M_0, M) \end{array}$ *estbijective*	

1.3 Segments et droites dans un espace affine

A et B sont deux points de l'espace affine $\mathcal{E}$.

Le milieu du segment $[AB]$ est le point I défini de manière univoque par : $I = \varphi_A^{-1}\left(\frac{1}{2}.\varphi(A, B)\right)$, autrement dit : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}$.

Le segment $[AB]$ (resp. la droite (AB)) est le sous-ensemble de $\mathcal{E}$: $\left\{M \in \mathcal{E} : \exists\ t \in [0, 1] : \overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{AB}\right\}$ (resp. $\left\{M \in \mathcal{E} : \exists\ t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{AB}\right\}$ pour A et B distincts).

1.4 Commentaire sur structure affine sur un ensemble.

Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et à second membre non nul :

$$y" + y = x$$

On obtient (cf. théorie des équations différentielles linéaires) en ajoutant la solution générale de l'équation homogène associée ($y" + y = 0$) et une solution particulière de l'équation complète :

$$\mathcal{E} = \left\{A_{(a,a')} : x \mapsto a.\cos x + a'.\sin x + x\right\}.$$

En désignant par E l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée :

$$y" + y = 0$$

on obtient l'espace vectoriel (de dimension 2) :

$$E = \left\{ v_{(\alpha,\alpha')} : x \mapsto \alpha . \cos x + \alpha' . \sin x \right\} .$$

L'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \to & E \\ & \left(A_{(a,a')}, A_{(b,b')}\right) & \mapsto & v_{(b-a,b'-a')} \end{array}$ munit $\mathcal{E}$ d'une structure d'espace affine (de dimension 2).

On peut définir sur l'espace affine $\mathcal{E}$ une notion de droite affine et plus précisément la droite affine passant par $A_{(a,a')}$ de direction le vecteur non nul $v_{(\alpha,\alpha')}$ (pour $(\alpha, \alpha') \neq (0,0)$) comme étant le sous ensemble :

$$\mathcal{D}\left(A_{(a,a')}, v_{(\alpha,\alpha')}\right) = \left\{ A_{(a+t.\alpha, a'+t.\alpha')},\ t \in \mathbb{R} \right\} .$$

On peut alors parler de parallélisme de 2 droites affines.

Par contre, la structure d'espace affine seule ne permet pas de dire si 2 droites sont orthogonales, cette définition se ramenant, de manière classique, à la définition de l'orthogonalité sur les directions associées (qui sont des droites vectorielles). Afin de pouvoir parler de droites vectorielles orthogonales, il est nécessaire de munir l'espace vectoriel d'une structure complémentaire : la structure euclidienne obtenue à l'aide d'un produit scalaire[2].

II.— Sous-espaces affines

Problème : $\mathcal{E}$ est muni d'une structure affine sur l'espace vectoriel E via une application $\varphi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to E$ vérifiant les propriétés (EA1) et (EA2). A est un point de $\mathcal{E}$ et F est un sous-espace vectoriel de E. On considère la partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ définie par :

$$\mathcal{F} = \left\{ M \in \mathcal{E} : \overrightarrow{AM} \in F \right\} .$$

Peut-on munir $\mathcal{F}$ d'une stucture d'espace affine ?

On introduit la restriction φ' à $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ de φ. Il est alors facile de voir que φ' est à valeurs dans F et vérifie les propriétés (EA1) et (EA2) où l'on considère, par abus, que φ':$\mathcal{F} \times \mathcal{F} \to F$.
$\mathcal{F}$ a donc une structure d'espace affine associé à l'espace vectoriel F.

Définition 1.

$\mathcal{F} = \left\{ M \in \mathcal{E} : \overrightarrow{AM} \in F \right\}$ est appelé sous-espace affine passant par A et de direction F.

On le note $\mathcal{V}(A, F)$ et on l'appelle aussi variété[1] affine passant par A de direction F.

Dans un espace affine de dimension n tout.sous-espace affine de dimension $n-1$ est appelé hyperplan.

---

[2]Un **produit scalaire** sur un espace vectoriel E est une application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) & \mapsto & \varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \end{array}$$

i) linéaire sur chaque argument
ii) symétrique
iii) définie positive :
$\forall \overrightarrow{x} \in E \setminus \left\{ \overrightarrow{0} \right\}, \varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) > 0.$

Un produit scalaire est donc une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.

Exemple : $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ espace vectoriel (de dimension infinie) des fonctions réelles continues (donc intégrables) sur le compact $[0,1]$. L'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (f, g) & \mapsto & \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \end{array}$$

est un produit scalaire sur E.

[1]Le concept de variété recouvre des notions aussi diverses que des espaces vectoriels, des espaces affines, des courbes paramétrées, des surfaces, des espaces de droites, ...

C'est le cadre "naturel" de la Mécanique et de la Relativité Générale.

Définition 2.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine associé à un espace vectoriel. $\mathcal{E}$'et $\mathcal{E}$" sont deux sous-espaces affines non vides de $\mathcal{E}$, de directions respectives E' et E". L'intersection $\mathcal{E}$'$\cap$ $\mathcal{E}$" est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Si ce sous-espace affine est non vide, sa direction est $E' \cap E$".

Définition 3.

Deux sous-espaces affines non vides d'un même espace affine sont parallèles s'ils ont même direction.

III.— Barycentres

3.1 Fonction vectorielle de Leibniz et barycentre

$\mathcal{E}$ est un espace affine associé à un espace vectoriel réel E.
$A_1, \ldots, A_n$ sont n points de $\mathcal{E}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont n réels.
Considérons la fonction vectorielle de Leibniz associée aux points $A_1, \ldots, A_n$ et aux réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \rightarrow & E \\ M & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \end{array}.$$

Théorème 1.

f désigne la fonction vectorielle de Leibniz associée aux points
A$_1, \ldots, A_n$ et aux réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
1) Si $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ alors l'application f est constante.
2) Si $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ alors l'application f est une bijection de $\mathcal{E}$ sur E.

□ M et M' sont deux points quelconques de l'espace affine $\mathcal{E}$.
On a : $f(M) - f(M') = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{MA_i} - \overrightarrow{M'A_i}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \overrightarrow{MM'}\right) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MM'}$
1) $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$. On a : $f(M) - f(M') = \overrightarrow{0}$ et ainsi $f(M) = f(M')$; f est donc constante.
2) $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. On obtient alors :

$$\forall (M, M') \in \mathcal{E}^2, (M \neq M' \Rightarrow f(M) \neq f(M')).$$

L'application f est ainsi injective.
Montrons que f est surjective, *i.e.* établissons que pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E il existe un point M de $\mathcal{E}$ tel que $f(M) = \overrightarrow{u}$.
$f(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1A_i}\right) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MA_1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1A_i}$.
L'équation en M $f(M) = \overrightarrow{u}$ est alors équivalente à $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MA_1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1A_i} = \overrightarrow{u}$
ou encore à $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{A_1M} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1A_i} - \overrightarrow{u}$, et puisque $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, on obtient :

$$\overrightarrow{A_1M} = 1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1A_i} - \overrightarrow{u}\right).$$

Finalement, tout vecteur $\overrightarrow{u}$ a un antécédent M (défini de manière univoque par la relation vectorielle ci-dessus) par f ceci établi que f est surjective.
Puisque f est à la fois injective et surjective, elle est bijective[1]. ■

Définition 1.

$\mathcal{E}$ est un espace affine associé à un espace vectoriel réel E.
$A_1, \ldots, A_n$ sont n points de $\mathcal{E}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont n réels de somme **non nulle**.
On désigne par f la fonction vectorielle de Leibniz associée.
On appelle barycentre des points $A_1, \ldots, A_n$ affectés des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, l'unique point G de E tel que :
$f(G) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.

3.2 Barycentre et sous-espaces affines

Définition 2.

$\mathcal{E}$' est un sous-espace affine de dimension p supérieure ou égale à 0 de direction E' d'un espace affine de $\mathcal{E}$ associé à un espace vectoriel E.
Soient $A_0, A_1, \ldots, A_p$ $p+1$ points de $\mathcal{E}$'. Le $(p+1)$-uplet $(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$' si la famille $\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p}\right)$ est une base de E'.

Exemple 1.— Si $\mathcal{E}$' est un plan affine, tout repère affine de $\mathcal{E}$' est constitué de 3 points non alignés.

Théorème 2.

$\mathcal{E}$' est un sous-espace affine de dimension p supérieure ou égale à 1 de direction E' d'un espace affine de $\mathcal{E}$ associé à un espace vectoriel E. $(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ est une repère affine de $\mathcal{E}$'. Alors $\mathcal{E}$' est l'ensemble des barycentres des points $A_0, A_1, \ldots, A_p$.

Bibliographie

[1] J. Lelong-Ferrand, *Géométrie différentielle*, Masson et C^{ie}, 1963

[2] J. Lelong-Ferrand, J.-M. Arnaudies, *Cours de Mathématiques*, tome 1, Dunod Université, 1978

[3] M. Monge, et all, *Mathématiques, Terminales C et E*, tome 1, Belin, 1974

[1]On aurait pu établir en une seule étape la bijectivité de f en remarquant que pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E il existe un **seul** point M de $\mathcal{E}$ tel que $f(M) = \overrightarrow{u}$.