Equations différentielles

Les équations différentielles sont apparues historiquement tout au début du développement de l'analyse, en général à l'occasion de problèmes de mécanique ou de géométrie.
De nombreux domaines (mécanique, géométrie, électricité, biologie, démographie, ...) comportent un très grand nombre de situations modélisées par des équations différentielles [1].
Une équation différentielle peut être présentée comme une relation entre une fonction et certaines de ses dérivées (première, seconde, ...) réalisée sur un intervalle.
Dans une **équation différentielle**, l'**inconnue** est une **fonction différentiable**.
La fonction exponentielle, dérivable, étant égale à sa propre dérivée est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' = y \tag{e}$$

Une solution de cette équation différentielle (linéaire du premier ordre homogène) est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathrm{R},\ f'(x) = f(x)$.
Résoudre ou **intégrer l'équation différentielle** (e), c'est trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$.
Il existe, bien entendu, des équations différentielles du premier ordre beaucoup plus compliquées. Une équation du type $y' = 1 + y^2$ est une équation différentielle du premier ordre mais n'est pas linéaire (en particulier la somme de deux solutions n'est pas nécessairement une solution). Sur chaque intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ où $k \in \mathrm{Z}$, la fonction tangente est solution.

I.— Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Physique	Biologie
La vitesse de désintégration d'un nuclide radioactif est proportionnel au nombre d'atomes N; le coefficient de proportionnalité λ (constante radioactive) étant caractéristique du nuclide considéré. L'équation différentielle modélisant cette situation est donc : $N'(t) = -\lambda.N(t)$. On obtient pour solution $N(t) = N_0.e^{-\lambda t}$ où N_0 désigne le nombre d'atomes à l'instant 0.	Si dans une culture, le taux de croissance des bactéries est proportionnel au nombre de bactéries $B(t)$ présentes à l'instant t et si l'on désigne par a ce coefficient de proportionnalité, cette situation est modélisée par l'équation différentielle : $B'(t) = a.B(t)$. On obtient pour solution $B(t) = B_0.e^{at}$ où B_0 désigne le nombre de bactéries présentes au début de l'expérience. Le coefficient a peut être déterminé par la connaissance du nombre de bactéries B_1 présentes dans le bocal à un instant $t_1 > 0$.

1.1 Equation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants $y' = ay$

Lemme 1.– L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = 0$ est l'ensemble des fonctions constantes.

---

[1] équations différentielles ordinaires ou équations aux dérivées partielles.
Une E.D.P. correspond à une relation entre une fonction de plusieurs variables (temps et position par exemple) et les dérivées partielles de la fonction (obtenues en fixant toutes les variables sauf une).
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ est l'équation aux dérivées partielles des cordes vibrantes où u est une fonction des 2 variables x(position) et t (temps). $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ représentant la dérivée seconde par rapport au temps (la variable d'espace x étant "fixée").

Théorème 1.– L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants

$$y' = ay \tag{1}$$

est l'ensemble des fonctions de la forme

$$x \mapsto Ce^{ax}$$

où C est une constante réelle quelconque [1].

Démonstration. Désignons par $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de (1) et par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$. On est donc amené à établir que $\mathcal{S} = \mathcal{E}$.
1) Établissons tout d'abord que $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$, ce qui signifie que toute fonction de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$ est solution de l'équation différentielle (1) :
considérons donc un élément quelconque de $\mathcal{E}$ et montrons qu'il appartient à $\mathcal{S}$: soit $f_C : x \mapsto Ce^{ax}$ un élément de $\mathcal{E}$; f_C est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x : $f'_C(x) = aCe^{ax}$. Il est alors évident que l'on a l'égalité $f'_C = a.f_C$ et qu'ainsi f_C est solution de l'équation différentielle (1). Par conséquent $f_C \in \mathcal{S}$ et ainsi $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$.
2) Prouvons maintenant l'inclusion réciproque $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$, qui signifie que toute solution de l'équation différentielle (1) est de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$:
soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de (1).
Introduisons la fonction auxiliaire $g : x \mapsto e^{-ax}.f(x)$. La fonction g, produit de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -a.e^{-ax}f(x) + e^{-ax}f'(x)$$

ou encore :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^{-ax}\left(-a.f(x) + f'(x)\right)$$

Puisque f est solution de (1), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a.f(x)$$

et ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 0$.
D'après le lemme 1, il en résulte que g est une fonction constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, i.e. qu'il existe une constante réelle C telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = C.$$

La fonction f est donc de la forme : $x \mapsto C.e^{ax}$ et appartient donc bien à $\mathcal{E}$. On en déduit que $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$.
Finalement, $\mathcal{S} = \mathcal{E}$.

Corollaire 1.– Il existe une unique solution f de l'équation différentielle

$$y' = ay$$

vérifiant la condition initiale

$$f(x_0) = y_0.$$

Il s'agit de la fonction :

$$x \mapsto y_0.e^{a(x-x_0)}$$

[1] L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1) a une **structure d'espace vectoriel** de dimension 1 dont une base est la fonction différentiable sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto e^{ax}$. En particulier la somme de deux solutions est encore une solution et le produit d'une solution par une constante réelle est aussi une solution.

1.2 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + \varphi$

Théorème 2.– Soit l'équation différentielle

$$y' = ay + \varphi \tag{2}$$

où φ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Si f_0 est une solution de (2) alors l'ensemble des solutions de (2) est l'ensemble des fonctions de la forme

$$x \mapsto Ce^{ax} + f_0(x)$$

où C est une constante réelle quelconque [2].

Démonstration. Supposons que l'on ait trouvé une solution particulière f_0 de (2). On a alors : $\begin{cases} f_0 \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ f_0' = af_0 + \varphi \end{cases}$ ce qui est équivalent à $\begin{cases} f_0 \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ f_0' - af_0 = \varphi \end{cases}$ (a). Par ailleurs :

$$f \text{ est solution de (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ f' = af + \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ f' - af = \varphi \end{cases}$$

D'autre part, puisque si f_0 est dérivable, on a : f est dérivable $\Leftrightarrow f - f_0$ est dérivable.
On obtient, en utilisant aussi (a) :

$$\begin{cases} f \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ f' - af = \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ f' - af = f_0' - af_0' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ f' - f_0' = a(f - f_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f\ - f_0 \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ (f - f_0)' = a(f - f_0) \end{cases}$$

On obtient alors :f est solution de (2) $\Leftrightarrow f - f_0$ est solution de (1)
On aboutit finalement à :

$$f \text{ est solution de (2)} \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, (f - f_0)(x) = Ce^{ax} \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = Ce^{ax} + f_0(x)$$

Corollaire 2.– a est un réel <u>non nul</u> et b est un réel.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y' = ay + b$$

est l'ensemble des fonctions de la forme

$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

où C est une constante réelle quelconque.

Exercice 1.– On considère l'équation différentielle

$$y' = y - x + 1 \tag{3}$$

1. Montrer qu'il existe une seule fonction affine f_0 solution de (3).
2. En déduire l'ensemble des solutions de (3).
3. Déterminer la solution g de (3) vérifiant la condition initiale $g(0) = 1$.
4. Pour t réel donné, on considère la fonction $\phi_t : (x, y) \longmapsto \big(x + t, (y - x)e^t + x + t\big)$.

   a) Montrer que si (x, y) sont les coordonnées d'un point M de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de g alors $\phi_t((x, y))$ sont aussi les coordonnées d'un point M_t de $\mathcal{C}$.

   b) Prouver que pour tous réels t et t', on a $\phi_t \circ \phi_{t'} = \phi_{t+t'}$.

[2] La somme de deux solutions n'est plus en général une solution. Par contre la différence de deux solutions de (2) est une solution de (1). On a ici une **structure d'espace affine**.

II.— Equations différentielles linéaires d'ordre 2 du type $y'' + \omega^2 y = 0$

Mécanique	Électricité
On étudie le mouvement d'un oscillateur élastique horizontal, dans le référentiel du laboratoire, *i.e.* le mouvement **sans frottement** sur un plan horizontal d'un corps de masse $m$attaché à un ressort (de masse supposée nulle) et de constante de raideur k. L'énergie mécanique E_M est somme de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle E_p : $E_M = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ En l'absence de frottement cette énergie est constante ; sa dérivée par rapport au temps est donc nulle : $\frac{dE_M}{dt} = \dot{x}\left(kx + m\ddot{x}\right) = 0$. En excluant la solution triviale, on obtient l'équation : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$	On considère un oscillateur électrique idéal constitué d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L dont la **résistance** est **supposée négligeable**. L'application de la loi d'additivité des tensions sur le circuit orienté donne l'équation : $\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$. En utilisant le fait que $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$ et que par conséquent $\frac{di}{dt} = \ddot{q}$, on aboutit à l'équation différentielle : $\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$ On peut aussi appliquer le principe de conservation de l'énergie électromagnétique égale à la somme de l'énergie électrique et de l'énergie magnétique.

Théorème 1.– L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre [1]

$$y'' + \omega^2 y = 0 \tag{4}$$

où ω est un réel <u>non nul</u> [2] est l'ensemble des fonctions de la forme : $x \mapsto A\cos(\omega\, x) + B\sin(\omega\, x)$ où A et B sont des constantes réelles quelconques [3].

Démonstration. Les fonctions $u_\omega : x \mapsto \cos(\omega\, x)$ et $v_\omega : x \mapsto \sin(\omega\, x)$ sont solutions de l'équation différentielle (4).
1) Montrons que toute fonction $f_{A,\,B} = A.u_\omega + B.v_\omega : x \mapsto A\cos(\omega\, x) + B\sin(\omega\, x)$ où A et B sont des réels quelconques est solution de l'équation différentielle (4) . $f_{A,\,B}$ est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
$f''_{A,B} = (A.u_\omega + B.v_\omega)'' = A.u''_\omega + B.v''_\omega = A\left(-\omega^2 u_\omega\right) + B\left(-\omega^2 v_\omega\right) = -\omega^2 f_{A,B}$ et ainsi $f''_{A,B} + \omega^2 f_{A,B} = \widehat{0}$; $f_{A,B}$ est alors solution de (4).
2) Réciproquement, établissons que toute solution de l'équation différentielle (4) est de la forme $f_{A,\,B} = A.u_\omega + B.v_\omega : x \mapsto A\cos(\omega\, x) + B\sin(\omega\, x)$. Soit f une solution de (4). On considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - f(0)\cos(\omega x) - \dfrac{f'(0)}{\omega}\sin(\omega x)$. g est 2 fois dérivable et $g'' + \omega^2 g = f'' + \omega^2 f = \widehat{0}$; g est alors solution de (4) et $g(0) = g'(0) = 0$. La fonction $h = \omega^2 g^2 + (g')^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $h' = 2\omega^2 gg' + 2g'g'' = 2g'\left(\omega^2 g + g''\right) = \widehat{0}$. h est donc constante de valeur $h(0) = 0$. Ainsi pour tout réel x, on a $\omega^2 g^2(x) + (g')^2(x) = 0$ (somme nulle de deux réels positifs ou nuls). Par conséquent, $g = \widehat{0}$ et ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)\cos(\omega x) + \dfrac{f'(0)}{\omega}\sin(\omega x)$.
f est alors de la forme $A.u_\omega + B.v_\omega$.

Exercice 1.– Montrer que l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ admet une solution φ vérifiant les conditions initiales $\varphi(0) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\varphi'(0) = 1$. Etudier alors la fonction φ.

[1] Ce type d'équations s'inscrit dans le cadre plus général des équations différentielles du type $ay'' + by' + cy = 0$ dont l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ dépend du signe du réel $\Delta = b^2 - 4ac$
a) $\Delta > 0$: 2 racines réelles r_1 et r_2. $\mathcal{S} = \{x \mapsto A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x}\}$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$
b) $\Delta = 0$: 1 racine réelle r. $\mathcal{S} = \{x \mapsto (Ax + B)\ \mathrm{e}^{rx}\}$
c) $\Delta < 0$: 2 racines complexes conjuguées $\alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\alpha - \mathrm{i}\beta$. $\mathcal{S} = \{x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\left(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right)\}$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

[2] pour $\omega = 0$, on obtient l'équation différentielle $y'' = 0$ dont les solutions sont les fonctions affines

[3] L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (4) a une structure d'espace vectoriel de dimension 2 dont une base est $(x \mapsto \cos(\omega\, x),\ x \mapsto \sin(\omega\, x))$