APPLICATIONS AFFINES

I. Définition et exemples

1.1 Définition

Définition 1.

$\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des espaces affines de directions respectives E et F.
Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est dite affine s'il existe une application linéaire φ de E dans F telle que l'on ait :
(AF) $\quad \forall (M, N) \in \mathcal{E}^2,\ \varphi\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{f(M)\, f(N)}$
Il est facile de voir que si f est une application affine, il existe une seule application linéaire φ vérifiant la propriété (AF) ; cette application linéaire est appelée application linéaire associée à f ou partie linéaire de f.

1.2 Exemples

1.2.1 Application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Les seules applications affines de $\mathbb{R}$ (affine) dans $\mathbb{R}$ (affine) sont de la forme $x \mapsto ax + b$; la partie linéaire est alors l'application linéaire $x \mapsto ax$ de $\mathbb{R}$ (vectoriel) dans $\mathbb{R}$ (vectoriel).

1.2.2 Translations

$\mathcal{E}$ est un espace affine associé à l'espace vectoriel E et $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de E.
La translation t de vecteur $\overrightarrow{u}$ est telle que :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2,\ \overrightarrow{t(M)\, t(N)} = \overrightarrow{MN} = Id_E\left(\overrightarrow{MN}\right).$$

C'est donc une application affine dont l'endomorphisme associé est l'identité.
Les translations sont donc les applications affines (hors les applications constantes associées à l'endomorphisme nul) les plus simples.

1.2.3 Homothéties

$\mathcal{E}$ est un espace affine associé à l'espace vectoriel E , ω est un point de E et k est un réel **non nul**.
L'homothétie h de centre ω et de rapport k a la propriété suivante :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2,\ \overrightarrow{h(M)\, h(N)} = k.\overrightarrow{MN} = k.Id_E\left(\overrightarrow{MN}\right)$$

h est donc une application affine dont l'endomorphisme associé $k.Id_E$ est l'homothétie vectorielle de rapport k.

1.2.4 Affinités

DÉFINITION 2.

$\mathcal{E}$ est un espace affine associé à l'espace vectoriel E. Soient E' et E" deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, $\mathcal{E}$' un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction E', k un nombre réel et p la projection affine sur $\mathcal{E}$' de direction E".
On appelle affinité par rapport à $\mathcal{E}$' de direction E" et de rapport k, l'application :
$a: \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{E} \\ M & \mapsto & M' \end{array}$ où $\overrightarrow{p(M)\,M'} = k.\overrightarrow{p(M)\,M}$

Cas particulier d'affinités :
i) $k = 0$. On obtient la projection affine sur $\mathcal{E}$' de direction E".
ii) $k = 1$. On obtient l'identité de l'espace affine $\mathcal{E}$.
iii) $k = -1$. On obtient la symétrie par rapport à $\mathcal{E}$' de direction E".

L'affinité par rapport à $\mathcal{E}$' de direction E" et de rapport k est une application affine dont l'endomorphisme associé est $k.Id_E + (1-k)\,\pi$ où π est l'endomorphisme associé[1] à la projection affine p.

L'importance des affinités provient du fait que toute application affine peut être décomposée en affinités.

II. PROPRIÉTÉS

2.1 Détermination d'une application affine

THÉORÈME 1.

$\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des espaces affines de directions respectives E et F ; soient A un point de $\mathcal{E}$, A' un point de $\mathcal{F}$ et φ une application linéaire de E dans F. Il existe une unique application affine f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ dont l'application linéaire associée soit φ et telle que A ait pour image A'.

Par cette application affine f, l'image d'un point quelconque M est l'unique point M' défini par :

$$\overrightarrow{A'M'} = \varphi\left(\overrightarrow{AM}\right).$$

2.2 Image d'un sous-espace affine par une application affine

THÉORÈME 2.

$\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des espaces affines de directions respectives E et F. f est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ dont l'application linéaire associée est φ. Soient A un point de $\mathcal{E}$ et E' un sous-espace vectoriel de E. L'image par f du sous-espace affine $\mathcal{V}(A, E')$ de $\mathcal{E}$ est le sous-espace affine $\mathcal{V}(f(A), \varphi(E'))$ de $\mathcal{F}$.

2.3 Applications affines et barycentres

THÉORÈME 3.

Toute application affine conserve le barycentre. Réciproquement, toute application qui conserve le barycentre est affine.

[1] π est la projection vectorielle sur E' de direction E"

2.4 Points invariants par une application affine

Théorème 4.

$\mathcal{E}$ est un espace affine associé à un espace vectoriel E et f est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ d'endomorphisme associé φ. L'ensemble des points de $\mathcal{E}$ invariants par f est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Si cet ensemble est non vide, il a pour direction le sous-espace vectoriel des vecteurs de E invariants par φ.

III. Groupe affine

3.1 Composition des applications affines

Théorème 1.

$\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des espaces affines de directions respectives E, F et G.
$f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une application affine dont l'application linéaire associée est φ et $g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est une application affine dont l'application linéaire associée est ψ. Alors l'application $g \circ f$ est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{G}$ dont l'application linéaire associée est $\psi \circ \varphi$.

Ce théorème s'avère très utile pour déterminer la nature de la composée de deux applications affines. Il permet de monter en particulier que l'ensemble des homothéties-translations a une structure de groupe pour la composition des applications.

3.2 Groupe affine

$\mathcal{E}$ est un espace affine.
Les bijections affines de $\mathcal{E}$ dans lui-même forment un groupe pour la composition des applications appelé groupe affine de $\mathcal{E}$ et noté $GA(\mathcal{E})$.
Un élément de $GA(\mathcal{E})$ est appelé transformation affine.

Le groupe affine est engendré par les affinités.

IV. Qu'est ce qu'une géométrie ?

Une géométrie correspond à la donnée d'un espace et d'un groupe de transformations agissant sur cet espace. Le but étant l'étude des notions invariantes sous l'action de ce groupe.
Pour une géométrie affine, le groupe utilisé est le groupe affine (le parallélisme de 2 droites est une propriété affine).
D'autres notions ne sont invariantes que sous l'action de certains sous-groupes du groupe affine (une application affine ne conserve pas nécessairement l'orthogonalité de 2 droites).
Une géométrie est d'autant plus riche que le groupe qui la définit est plus restreint.

Bibliographie

[1] J. Lelong-Ferrand, *Géométrie différentielle*, Masson et C^{ie}, 1963

[2] J. Lelong-Ferrand, J.-M. Arnaudies, *Cours de Mathématiques*, tome 1, Dunod Université, 1978

[3] M. Monge, et all, *Mathématiques, Terminales C et E*, tome 1, Belin, 1974