Analyse combinatoire

I.— Liste à p éléments (ou p-liste)

Activité préliminaire : tirages successifs **avec** remise.
Une urne contient 5 boules numérotés de 1 à 5.
On tire *successivement* 3 boules en *remettant* après chaque tirage la boule dans l'urne après avoir noté son numéro.
Soit E l'ensemble des boules dans l'urne ; on a alors $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Un tirage correspond à un *triplet* (l'ordre compte et des répétitions d'éléments sont possibles) ; on dit aussi une *liste à 3 éléments* ou *3-liste*.
$(2, 3, 5)$ est une issue possible ; $(3, 5, 2)$ est une autre issue possible, elle est différent de la précédente ; les répétitions sont possibles, e.g. $(2, 5, 2)$ correspond au tirage de la boule numéro 2 au premier et troisième tour et de la boule numéro 2 au deuxième tirage.
L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire est alors l'ensemble de tous les triplets constitués d'éléments de E possibles.
On se propose de compter (dénombrer) le nombre de tirages (triplets) possibles :

1. il y a 5 possibilités pour tirer la première boule ;

2. il y a aussi 5 possibilités pour tirer la deuxième boule (puisque la boule tirée précédemment a été remise dans l'urne et que l'on est ramené ainsi à la situation initiale) ;

3. il y a encore 5 possibilités pour tirer la dernière boule.

Il y a donc en tout $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$ tirages possibles.
Le cardinal de l'univers est donc égal à $card\,(\Omega) = 125$.

Définition 1.– Soit E un ensemble contenant un nombre non nul n d'éléments.
Soit p est un entier naturel non nul. Une *p-liste* (on dit aussi une *liste à p éléments* ou encore un *p-uplet*) d'éléments de E est une suite ordonnée de p éléments (distincts ou non) de l'ensemble E.

Remarque 1.– Deux listes à p éléments de E peuvent différer soit par les éléments qu'elles contiennent, e.g. $(2, 3, 5)$ et $(1, 3, 4)$, soit par l'ordre dans lequel ces éléments apparaissent, e.g. $(2, 3, 5)$ et $(5, 3, 2)$.

Exemple 1.– Le lancement d'un dé à 6 faces 3 fois de suite fournit des triplets de nombres compris entre 1 et 6, e.g. $(2, 5, 1)$ ou bien $(2, 6, 2)$.

La proposition suivante permet de dénombrer de telles p-listes :

Proposition 1.– Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est égal à n^p.

Exemple 2.– Il y a 6^3 lancers de dés possibles.

Exercice 1.– Un questionnaire comporte 10 questions. Pour chacune d'elle il n'y a que deux réponses possibles : OUI ou bien NON. Dans ces conditions, il y a plus de 1 000 façons différentes de remplir le questionnaire. Vrai ou faux ?

Exercice 2.– Déterminer le nombre de parties d'un ensemble à n éléments.

II.— Arrangements et permutations

Activité préliminaire : tirages successifs **sans** remise.
Une urne contient 5 boules numérotés de 1 à 5.
On tire *successivement* 3 boules de l'urne. On ne remet pas la boule tirée dans l'urne.
Soit E l'ensemble des boules dans l'urne ; on a alors $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Un tirage correspond à un *triplet* d'éléments de E deux à deux distincts (l'ordre compte et les répétitions d'éléments ne sont pas possibles).
$(2, 3, 5)$ est une issue possible, $(3, 5, 2)$ en est une autre. Par contre $(2, 5, 2)$ n'est pas admissible car ceci signifie que la boule numéro 2 a été obtenue et au premier et au troisième tirage, ce qui n'est pas possible car les boules tirées ne sont pas remises dans l'urne.

L'univers Ω' associé à cette expérience aléatoire est alors l'ensemble de tous les triplets constitués d'éléments de E deux à deux distincts.
On se propose de compter le nombre de tirages (triplets d'éléments deux à deux distincts) possibles.

1. il y a 5 possibilités pour tirer la première boule ;
2. il ne reste plus que 4 possibilités pour tirer la deuxième boule (puisque la boule tirée précédemment n'est pas remise dans l'urne) ;
3. il n'y a plus que 3 possibilités pour tirer la dernière boule.

Il y a donc en tout $5 \times 4 \times 3 = 60$ tirages possibles.
Le cardinal de l'univers est alors $card\,(\Omega') = 60$.

Définition 1.– Soit E un ensemble contenant un nombre non nul n d'éléments.
Soit p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$.
Un *arrangement de p éléments* de E est une p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemple 1.– Au départ d'une course, il y a 15 chevaux partants numérotés de 1 à 15.
Le tiercé dans l'ordre est un arrangement de 3 éléments de l'ensemble des 15 numéros.

Proposition 1.– Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments se note A_n^p et vaut :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$$

(produit de p facteurs)

Démonstration. On compte le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments :
– on a n possibilités pour choisir le 1^{er} élément ;
– il reste $n-1$ possibilités pour choisir le $2^{\text{ème}}$ élément ;
– il reste $n-2$ possibilités pour choisir le $3^{\text{ème}}$ élément ;
– ....
– il reste $n-p+1$ possibilités pour choisir le $p^{\text{ème}}$ et dernier élément.
D'après le principe multiplicatif, on a donc en tout $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$ arrangements de p éléments possibles.

Exemple 2.– Le nombre de tiercés possibles pour une course de 15 chevaux est égal à :

$$A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13 = 2\,730$$

Exercice 1.– De combien de façons peut-on choisir un président, un secrétaire et un trésorier dans un bureau composé de 8 personnes ?

Définition 2.– Un arrangement de n éléments d'un ensemble E à n éléments s'appelle une *permutation* de E.

Exemple 3.– Les mots CBA, CAB sont des anagrammes[1] du mot BAC ; ils correspondent respectivement aux triplets (C,B,A) et (C,A,B) d'éléments deux à deux distincts de l'ensemble à 3 éléments {A, B, C} ; ce sont donc des permutations de l'ensemble {A, B, C}.

Définition 3.– Pour tout entier naturel non nul n, on note $n!$ (on lit *factorielle n*) le nombre entier :

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

On pose, par convention, $0! = 1$

Exemple 4.– $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Proposition 2.– Le nombre de permutations d'un ensemble (non vide) à n éléments est égal à $n!$

Exercice 2.– De combien de manières différentes peut-on ranger 6 personnes en file indienne ?

Exercice 3.– Combien le mot CHERE a-t-il d'anagrammes ?

III.— Combinaisons

Activité préliminaire : tirage **simultané**.
Une urne contient 5 boules numérotés de 1 à 5.
On tire *simultanément* 3 boules de l'urne.
Soit E l'ensemble des boules dans l'urne ; on a alors $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Une issue est une partie (ou sous-ensemble) à 3 éléments de E, appelée *combinaison* de 3 éléments de E.
$\{1, 2, 3\}$ est une issue possible égale à $\{2, 3, 1\}$ (l'ordre n'intervient pas puisque l'on tire les 3 boules en même temps !) ; $\{2, 4, 5\}$ en est une autre.
L'univers Ω'' associé à cette expérience aléatoire est alors l'ensemble de toutes les parties à 3 éléments de E.
Afin de dénombrer ces combinaisons à 3 éléments de E, mettons en correspondance les univers Ω' et Ω''.

tirages successifs sans remise	tirage simultané
$(1, 2, 3)$	
$(1, 2, 3)$	
$(2, 1, 3)$	$\{1, 2, 3\}$
$(2, 3, 1)$	
$(3, 1, 2)$	
$(3, 2, 1)$	
$\vdots$	$\vdots$
$(3, 4, 5)$	
$(3, 5, 4)$	
$(4, 3, 5)$	$\{3, 4, 5\}$
$(4, 5, 3)$	
$(5, 3, 4)$	
$(5, 4, 3)$	

A chaque tirage simultané de 3 boules parmi les 5 boules de E correspond $3 \times 2 \times 1 = 3!$ arrangements de 3 éléments de cet ensemble ; il y a donc 3! fois moins de combinaisons de 3 éléments de E que d'arrangements de 3 éléments de E.
Ainsi $card\left(\Omega''\right) = \dfrac{card\,(\Omega')}{3!} = \dfrac{60}{6} = 10.$

[1]du grec *anagramma* : renversement de lettres

Définition 1.– Soit E un ensemble contenant un nombre non nul n d'éléments.
Soit p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.
Une *combinaison de p éléments* de E est une partie de E constituée de p éléments distincts.

Exemple 1.– A la belote, chacun des 4 joueurs a dans sa main 8 cartes ; cette main correspond à une combinaison de 8 cartes parmi les 32 du jeu.

Proposition 1.– Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments se note C_n^p ou $\binom{n}{p}$ et vaut : $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

Démonstration. A partir de chaque combinaison à p éléments de E, on constitue $p!$ arrangements de p éléments de E . on obtient donc : $\binom{n}{p} \times p! = A_n^p$ et le résultat en découle.

Exemple 2.– Il y a, à la belote, $\binom{32}{8} = \dfrac{32!}{8! \times 24!} = 10\,518\,300$ mains possibles.

Exercice 1.– De combien de manières peut-on choisir 2 délégués dans une classe de 30 élèves ?

Exercice 2.– Au loto, il y a 49 numéros. Une grille de loto comporte 6 numéros (on ne tient pas compte du numéro complémentaire). Combien de grilles différentes peut-on obtenir ?

Exercice 3.– On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes. On dit que ces 3 cartes forment une main de 3 cartes.

1. Combien de mains différentes peut-on obtenir ?

2. Combien y a-t-il de mains contenant le roi de coeur ?
3. Combien y a-t-il de mains contenant 2 dames exactement ?
4. Combien y a-t-il de mains ne contenant aucun as ?

Proposition 2.– Soit n un entier naturel. Soit p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.
On a : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

Proposition 3.– Relation de Pascal.– Pour tous entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n-1$ on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Démonstration. Soit $n \geq 2$ et soit a un élément fixé de E. Réalisons une partition des parties de E à p éléments :
– celles ne contenant pas a : ce sont les parties à p éléments de l'ensemble $E \setminus \{a\}$ à $n-1$ éléments ; il y en a $\binom{n-1}{p}$.
– celles contenant a : on les obtient en ajoutant l'élément a aux parties à $p-1$ éléments de $E \setminus \{a\}$; il y en a $\binom{n-1}{p-1}$.
Le principe de la somme livre alors le résultat.

Théorème 1.– Formule du binôme de Newton.– Soient a et b deux nombres complexes et soit n un entier naturel non nul. On a alors :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

7

EXERCICE 4.– Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

1. en utilisant la formule du binôme de Newton
2. en dénombrant de deux manières différentes le nombre de parties d'un ensemble à n éléments.

EXERCICE 5.– On considère parmi les combinaisons à p éléments d'un ensemble à n éléments ($n \geq 2$) les 4 parties suivantes : celles qui contiennent deux éléments donnés a et b, celles qui contiennent a mais pas b, celles qui contiennent b mais pas a et finalement celles qui ne contiennent ni a ni b.

Prouver alors que : $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}$

EXERCICE 6.– En dérivant de deux manières différentes la fonction polynôme $P_n : x \mapsto (1+x)^n$, prouver que : $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

EXERCICE 7.– Espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$

1. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$
2. Soit X une variable aléatoire suivante la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$. L'espérance de cette variable aléatoire est donnée par $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \times p(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Montrer, en effectuant notamment le changement d'indice $i = k-1$, que $E(X) = np$.