Equations différentielles

I.— Equations différentielles d'ordre 1

Correction exercice 1.– Soit l'équation différentielle

$$y' = y - x + 1 \tag{1}$$

1. $f_0 : x \mapsto ax + b$ fonction affine solution de (1) $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f_0 \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_0'(x) = f_0(x) - x + 1 \qquad (a) \end{array} \right.$.

   Pour tout réel x on a : $(a) \Leftrightarrow a = ax + b - x + 1 \Longleftrightarrow (a-1)x - a + b + 1 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a - 1 = 0 \\ -a + b + 1 = 0 \end{array} \right.$ d'après l'unicité de l'écriture polynomiale. On obtient finalement $(a, b) = (1, 0)$ et ainsi il existe bien une seule fonction affine solution de (1) qui n'est autre que $f_0 : x \mapsto x$.

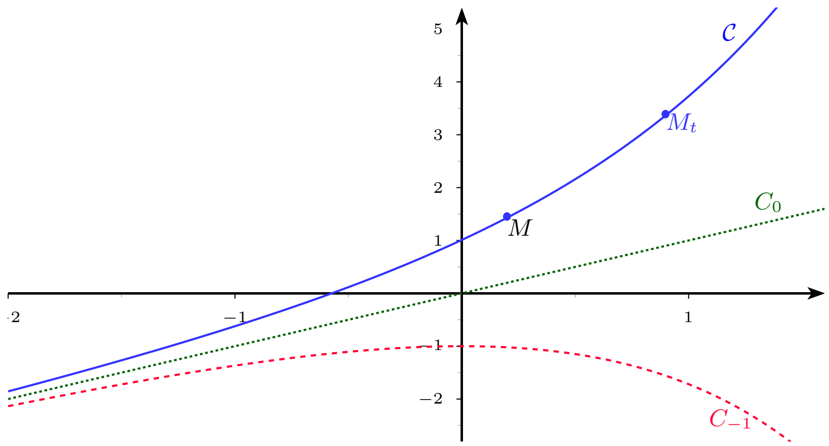
2. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1) est alors l'ensemble des fonctions $h_C : x \mapsto Ce^x + x$ où C est une constante réelle, h_C étant la somme de la solution générale de l'équation homogène associée $y' = y$ et d'une solution particulière de (1).

3. On est amené à déterminer le réel C tel que $h_C(0) = 1$ ce qui conduit à la résolution de l'équation du premier degré d'inconnue C : $Ce^0 + 0 = 1$. On obtient alors $C = 1$ et ainsi la fonction $g = h_1$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + x$.

4. Soit pour t réel donné la fonction $\phi_t : (x, y) \longmapsto \left(x + t, (y - x)e^t + x + t\right)$.
   a) Soient (x, y) les coordonnées d'un point M de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de g ; on a alors $M(x, e^x + x)$. Ainsi, puisque $\phi_t\left((x, \underline{y})\right) = \left(x + t, (\underline{y} - x)e^t + x + t\right)$, on a
   $\phi_t\left((x, \underline{e^x + x})\right) = \left(x + t, (\underline{e^x + x} - x)e^t + x + t\right) = \left(x + t, e^x e^t + x + t\right) = \left(x + t, e^{x+t} + x + t\right) = (x + t, g(x + t))$ et ainsi le point M_t de coordonnées $\phi_t((x, y)) = (x + t, g(x + t))$ appartient bien à $\mathcal{C}$.

   b) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, t et t'deux réels. On a : $\phi_{t'}((x, y)) = \left(x + t', (y - x)e^{t'} + x + t\right)$ et ainsi :

$$\begin{aligned}
\phi_t\left(\phi_{t'}((x, y))\right) &= \phi_t\left(\left(\underline{x + t'}, \underline{\underline{(y - x)e^{t'} + x + t'}}\right)\right) \\
&= \left(\underline{x + t'} + t, \left(\underline{\underline{(y - x)e^{t'} + x + t'}} - (\underline{x + t'})\right)e^t + \underline{x + t'} + t\right) \\
&= \left(x + t' + t, \left(ye^{t'} - xe^{t'}\right)e^t + x + t' + t\right) \\
&= \left(x + t + t', (y - x)e^{t+t'} + x + t + t'\right) \\
&= \phi_{t+t'}((x, y))
\end{aligned}$$



II.— Equations différentielles d'ordre 2 du type $y'' + \omega^2 y = 0$

Correction exercice 1.– Soit l'équation différentielle

$$y'' + 4y = 0 \tag{2}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre (2) est l'ensemble des fonctions $f_{A,B} : x \mapsto A\cos(2x) + B\sin(2x)$. On cherche à déterminer l'unique solution de (2) qui vérifie les conditions initiales $\begin{cases} f_{A,B}(0) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ f'_{A,B}(0) = 1 \end{cases}$.

Puisque l'on a pour tout réel x, $f'_{A,B}(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$, on obtient $A = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $B = \dfrac{1}{2}$. Ainsi

$$\varphi : x \mapsto -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Afin d'étudier la fonction φ on va transformer son expression analytique[1]. Pour tout réel x, on a :

$$\varphi(x) = \cos\frac{5\pi}{6}\cos(2x) + \sin\frac{5\pi}{6}\sin(2x) = \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right).$$

φ est périodique de période π.On va donc étudier les variations de φ sur un intervalle de diamètre π que l'on va déterminer à l'aide des singularités de φ' où $\varphi'(x) = -2\sin\left(2x - \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

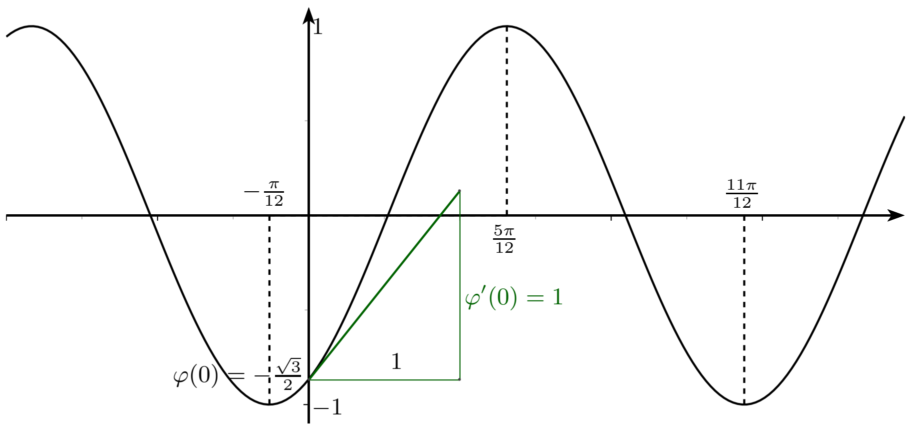
$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) = 0 \iff 2x - \frac{5\pi}{6} \equiv 0\,[\pi] \iff x \equiv \frac{5\pi}{12}\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

On va donc étudier φ sur l'intervalle $I = \left[\dfrac{5\pi}{12} - \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}\right] = \left[-\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}\right]$.

$x \in \left[-\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}\right] \implies -\dfrac{\pi}{6} \le 2x \le \dfrac{5\pi}{6} \implies -\pi \le 2x - \dfrac{5\pi}{6} \le 0 \implies \sin\left(2x - \dfrac{5\pi}{6}\right) \le 0 \implies \varphi'(x) \ge 0$

$x \in \left[\dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12}\right] \implies \sin\left(2x - \dfrac{5\pi}{6}\right) \ge 0 \implies \varphi'(x) \le 0.$

On obtient alors la courbe représentative de φ.



[1] Pour $(a, b) \neq (0, 0)$, l'expression $a\cos x + b\sin x$ peut être transformée. On écrit

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$

Puisque $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, il existe un réel α tel que $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$ et ainsi on peut écrire :

$$\underline{a\cos x + b\sin x} = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x\right) \underline{= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)}$$